Proximity Graphs: construcción de gráficas de proximidad y sus características asintóticas

Hector Saib Maravillo Gomez, Diego Villareal de la Cerda, Heriberto Espino Montelongo

Regiones vacías, áreas explícitas y consecuencias para grado promedio y longitud de arista

Pregunta Central

Dada una nube finita de puntos V, una **gráfica de proximidad** conecta pares $p, q \in V$ mediante una regla geométrica local: la arista aparece cuando una *región vacía* asociada al segmento pq no contiene otros puntos. Esta perspectiva unifica familias clásicas como **Gráfico de Gabriel (GG)**, **β-esqueleto**, **Relative Neighborhood Graph (RNG)**, **Stepping-Stone** entre otros.

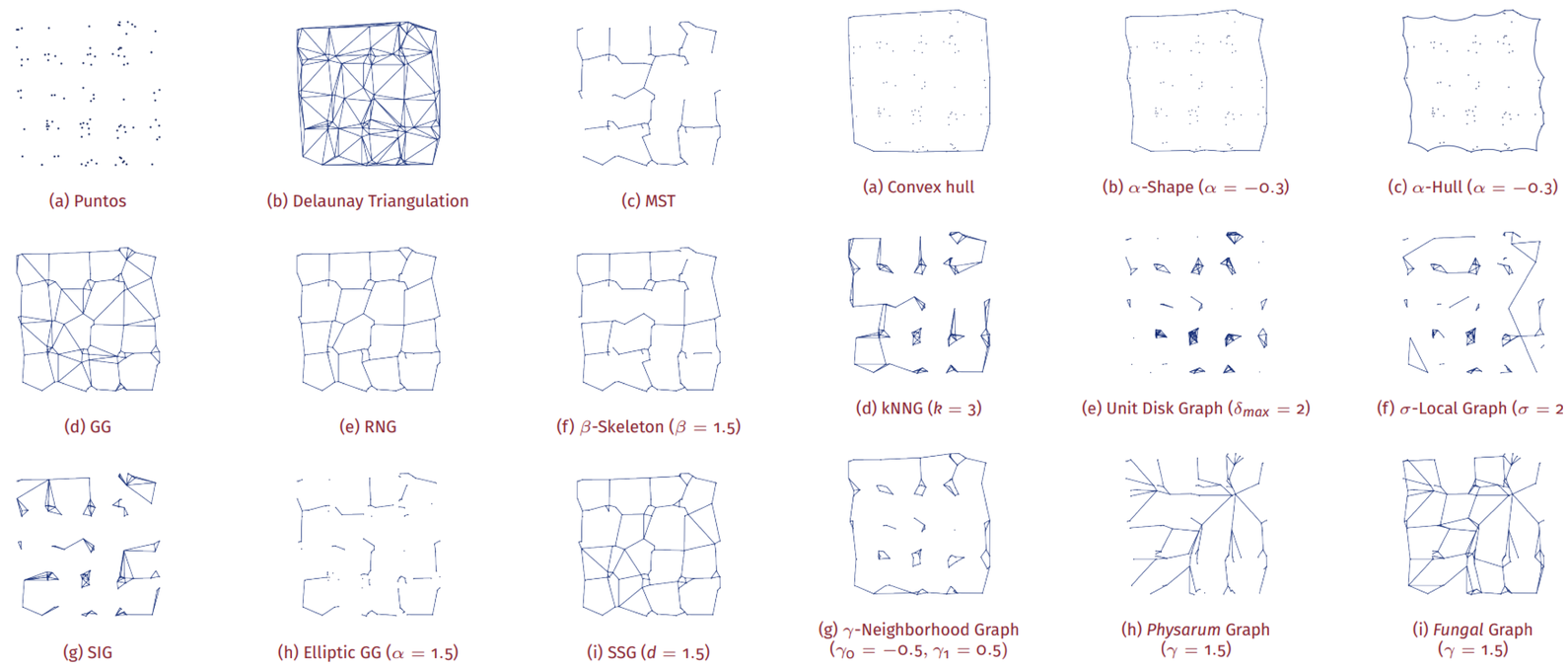
Cada familia modifica la noción local de vecindad, pero conserva la misma pregunta: *¿cuándo debe existir una arista entre dos puntos?*. Esa formulación permite comparar reglas distintas dentro de un mismo marco geométrico. Además, si se conoce el área de la región vacía asociada a cada regla, entonces puede anticiparse cómo cambian el grado promedio, la longitud típica de arista y la esparsidad de la gráfica.

Aporte del trabajo.

- Se presenta una librería en Python con una API para construir, visualizar y comparar múltiples familias de gráficas de proximidad y modelos biológicos.
- La contribución teórica es obtener fórmulas explícitas para el área de dos kernels de exclusión: la **β-luna** y el **Stepping-Stone Diversion**.
- Ese parámetro de área controla cantidades asintóticas: **grado esperado**, **longitud de arista** y **esparsidad** de la red.

El cartel contesta la pregunta: *¿qué área tiene la región vacía que decide una arista?*

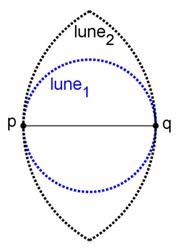
Galería Visual



Familias de proximidad y variaciones parametrizadas — **Gráficas de proximidad y modelos bio-inspirados**

La librería reúne gráficas de proximidad, gráficas geométricas y familias biológicas. La comparación visual ayuda a observar cómo cambia la topología cuando cambia el kernel de exclusión.

Regiones Vacías y Área



$lune_\beta(p,q)$ para $\beta = 1, 2$.

El kernel de exclusión resume la geometría local que decide si una arista sobrevive.

Principio probabilístico. Si una región asociada a una pareja (p, q) tiene área

$$A(l) = w\, l^2, \qquad l = \|p - q\|,$$

entonces bajo un proceso de Poisson homogéneo de intensidad ρ,

$$\Pr(\text{vecindad vacía}) = e^{-\rho w l^2}.$$

Consecuencia. Calcular el área del kernel equivale a fijar la ley base de supervivencia de aristas y, en el límite, el comportamiento del grado promedio y de las longitudes de arista.

Parámetro w. Una vez fijada la forma del kernel, toda la información asintótica baja a una sola constante geométrica: cuanto mayor es el área vacía, más estricta es la regla de adyacencia.

β-Esqueleto

Área de la β-luna. Si $d(p, q) = l$ y $\beta > 1$,

$$A(\text{lune}_\beta(p,q)) = \frac{l^2}{2}\left(\beta^2 \arccos\left(\frac{\beta-1}{\beta}\right) - (\beta-1)\sqrt{2\beta-1}\right) = \frac{l^2}{2} C_\beta.$$

En particular,

$$C_\beta = \beta^2 \arccos\left(\frac{\beta-1}{\beta}\right) - (\beta-1)\sqrt{2\beta-1}, \qquad \lambda_\beta(T) = \frac{C_\beta}{2}.$$

Teorema: grado promedio asintótico.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\deg(X_1) \mid X_1 = x] = \frac{2\pi}{C_\beta}.$$

Corolario de Poisson para longitud de arista.

$$f(l;\beta) = \rho l\, C_\beta \exp\left(-\frac{\rho l^2}{2} C_\beta\right),$$

$$\mu_\beta = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho C_\beta}}, \qquad \sigma_\beta^2 = \frac{4-\pi}{2\rho C_\beta}.$$

Cuando $\beta = 1$ se recupera GG; cuando $\beta = 2$ se recupera RNG.

Stepping-Stone

Definición geométrica.

$$\Omega_d(p,q) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x-p\|^d + \|x-q\|^d \le \|p-q\|^d\right\}, \qquad d \ge 1.$$

Corolario de escala.

$$A(d, L) = L^2\, a(d), \qquad a(d) = A(d, 1).$$

Teorema: representación normalizada.

$$a(d) = 4\int_{2^{-1/d}}^{1} y_*(u)\, x_*'(u)\, du,$$

con

$$x_*'(u) = u + u^{d-1}(1-u^d)^{(2-d)/d},$$

$$y_*(u) = \tfrac{1}{2}\sqrt{4u^2 - \left(u^2 - (1-u^d)^{2/d} + 1\right)^2}.$$

Valores ancla y monotonicidad.

$$a(1) = 0, \qquad a(2) = \frac{\pi}{4}, \qquad a(\infty) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2},$$

y $a(d)$ es creciente en d. Para $d = 2$ se recupera el caso de GG; cuando $d \to \infty$ aparece la lente de intersección tipo RNG.

Grado Asintótico

Teorema. Para una gráfica planar de región vacía definida por una región regular S, y para casi toda posición x,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\deg(X_1) \mid X_1 = x] = \frac{\pi}{\lambda(T)},$$

donde $\lambda(T)$ es el área de la región vacía unitaria.

Casos clásicos recuperados inmediatamente.

$$\text{GG}: \ \lambda(T) = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \lim \mathbb{E}[\deg] = 4,$$

$$\text{RNG}: \ \lambda(T) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \lim \mathbb{E}[\deg] \approx 2.558.$$

Este teorema convierte al área del kernel en la constante que permite la comparación asintótica entre familias.

Longitud de Arista

Paso 1: probabilidad de vacío. Si la región de exclusión asociada a una pareja a distancia l tiene área

$$A(l) = w\, l^2,$$

entonces, para un proceso de Poisson homogéneo de intensidad ρ,

$$N(A(l)) \sim \text{Poisson}(\rho w l^2) \quad \Longrightarrow \quad \Pr\big(N(A(l)) = 0\big) = e^{-\rho w l^2}.$$

Paso 2: función de supervivencia. Una arista de longitud mayor que l sobrevive exactamente cuando la región sigue vacía hasta ese umbral. Por tanto,

$$\Pr(L > l) = e^{-\rho w l^2}, \qquad F_L(l) = \Pr(L \le l) = 1 - e^{-\rho w l^2}.$$

Paso 3: derivar la densidad.

$$f_L(l) = 2\rho w l\, e^{-\rho w l^2}, \qquad l \ge 0.$$

Queda dependiente únicamente por la constante geométrica w.

Paso 4: momentos.

$$\mathbb{E}[L] = \int_0^\infty l\, f_L(l)\, dl = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\rho w}},$$

$$\mathbb{E}[L^2] = \int_0^\infty l^2 f_L(l)\, dl = \frac{1}{\rho w}, \qquad \text{Var}(L) = \frac{4-\pi}{4\rho w}.$$

El área del kernel determina la ley de vacío, y esa ley induce la distribución de longitudes de arista

La Librería

Qué es ProximityGraphs. Es una librería en Python para construir, visualizar y comparar gráficas de proximidad. Reúne familias clásicas, modelos parametrizados y gráficas bio-inspiradas, de modo que la exploración computacional y la teoría asintótica puedan dialogar directamente.

Capacidades principales.

- Genera conjuntos de puntos y patrones espaciales de prueba.
- Construye gráficas como β-esqueleto, Stepping-Stone, Unit Disk, Alpha Shape, γ-vecindario, *Physarum Graph*, *Fungal Graph*, entre otras.
- Dibuja y compara distintas reglas de proximidad sobre la misma nube de puntos.
- Sirve como plataforma reproducible para experimentar con vacuidad, conectividad, longitud de arista y grado esperado.

Rol dentro del trabajo. La librería funciona como banco computacional para ilustrar los teoremas del póster, explorar el efecto de los parámetros y conectar resultados geométricos con evidencia reproducible.

github.com/HectorMaravillo/ProximityGraphs