

Características asintóticas de las gráficas de proximidad

De reglas geométricas locales a leyes probabilísticas globales

Heriberto Espino-Montelongo

Universidad de las Américas Puebla

59° Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana · 2026

SECCIÓN I

El lenguaje geométrico

Del punto a distintas nociones de cercanía



La cercanía es una regla geométrica

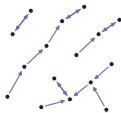
Una **gráfica geométrica** tiene vértices en el espacio y aristas trazadas entre algunos pares.

En una gráfica de proximidad, la distancia no decide por sí sola:

$\{p, q\} \in E \iff$ la regla acepta p, q .

Ejemplos: Nearest Neighbor Graph (NNG), Gabriel graph (GG), Relative Neighborhood Graph (RNG) y triangulación de Delaunay.

NNG dirigida



RNG • 21 aristas



Gabriel • 32 aristas



Delaunay • 38 aristas



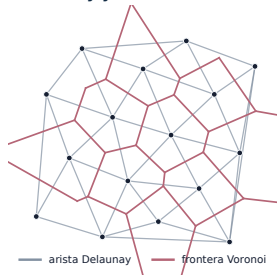
La misma nube de puntos con NNG, GG, RNG y Delaunay.

¿Qué estructura global emerge al repetir una regla local?

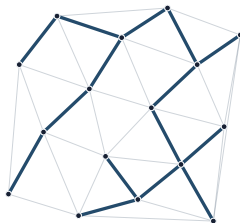
Fuente: Toussaint (1980); Jaromczyk y Toussaint (1992).

Voronoi, Delaunay y MST responden preguntas distintas

Delaunay y Voronoi: dualidad



MST: optimización global



mínima longitud total · sin ciclos · $n - 1$ aristas

Delaunay como dual de Voronoi; MST resaltada dentro de Delaunay.

Triangulación de

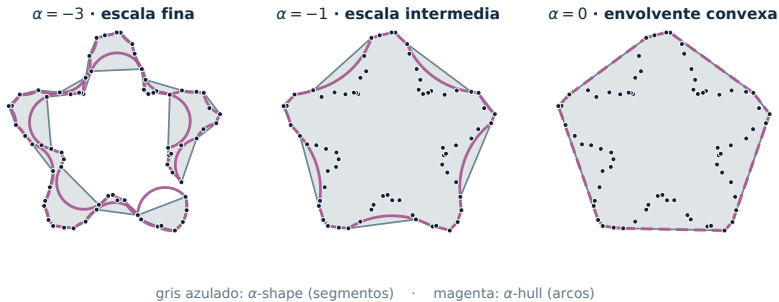
Delaunay: conecta dos sitios cuando sus celdas de Voronoi comparten una frontera.

Minimum Spanning Tree (MST): conecta todos los puntos con $n - 1$ aristas y longitud total mínima.

La proximidad reúne reglas locales, duales y globales.

Fuente: Devroye (1988); Jaromczyk y Toussaint (1992).

Alpha-shape y alpha-hull



Misma nube y misma escala: frontera poligonal frente a frontera de arcos.

Alpha-shape: selecciona símplexes de Delaunay por su radio circunscrito y conserva la frontera recta.

Alpha-hull: sustituye los lados de esa frontera por arcos circulares de radio $R = 1/|\alpha|$.

$\alpha = 0$ recupera, por definición, la **envoltente convexa**.

Fuente: Edelsbrunner, Kirkpatrick y Seidel (1983); Radke (1988); ProximityGraphs (2026).

SECCIÓN II

Regiones vacías y familias paramétricas

Una forma local decide qué aristas sobreviven

Una región vacía decide cada arista

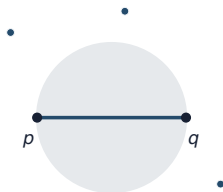
A cada par candidato se le asigna una región de exclusión $S(p, q)$:

$$\{p, q\} \in E \iff S(p, q) \cap (V \setminus \{p, q\}) = \emptyset.$$

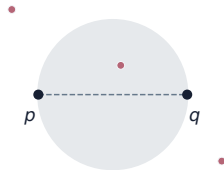
Si un tercer punto entra en esa región, cancela la arista. La forma de $S(p, q)$ cambia de una construcción a otra.

En las siguientes diapositivas veremos cada plantilla por separado.

Región vacía: se conserva



Punto interior: se elimina



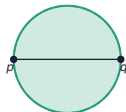
La misma región: un punto interior cancela la arista candidata.

Una regla local de vacuidad decide, pareja por pareja, la gráfica completa.

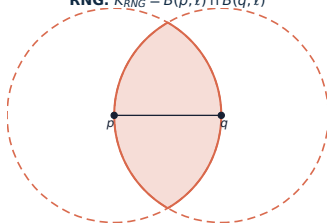
Fuente: Cardinal, Collette y Langerman (2009); Kannangara et al. (2018).

Plantillas de Gabriel graph y RNG

Gabriel: $K_{GG} = B((p+q)/2, \ell/2)$



RNG: $K_{RNG} = B(p, \ell) \cap B(q, \ell)$



Mismo segmento y misma ventana: los círculos generadores revelan la diferencia de tamaño.

El **Gabriel graph** exige vaciar
la bola de diámetro pq .

RNG exige vaciar la lente formada
por dos bolas de radio ℓ_{pq} .

$K_{GG} \subset K_{RNG}$, por tanto $RNG \subseteq GG$. Ambas son conectadas en cualquier dimensión; en el plano, además son planas.

Fuente: Gabriel y Sokal (1969); Toussaint (1980); Jaromczyk y Toussaint (1992).

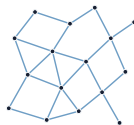
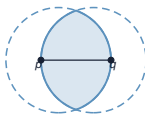
Lune-based beta-skeleton en $\mathbb{R}^2$

$\beta = 1$: **Gabriel**



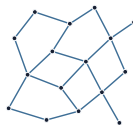
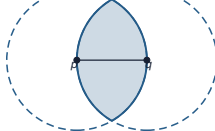
32 aristas sobre la misma nube

$\beta = 1.5$



24 aristas sobre la misma nube

$\beta = 2$: **RNG**



21 aristas sobre la misma nube

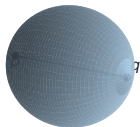
Arriba: región y círculos generadores a escala común. Abajo: grafo sobre la misma nube.

$\beta = 1 \Rightarrow \text{GG}$, $\beta = 2 \Rightarrow \text{RNG}$; **al crecer la región, desaparecen aristas.**

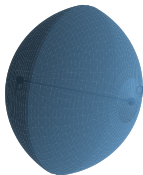
Fuente: Kirkpatrick y Radke (1985); Jaromczyk y Toussaint (1992).

Lune-based beta-skeleton en $\mathbb{R}^3$

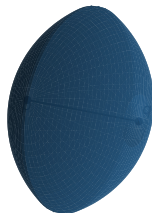
$\beta = 1$: bola de Gabriel



$\beta = 1.5$



$\beta = 2$: lente RNG



Para $\beta \geq 1$, la región es la intersección de dos bolas de radio

$$\frac{\beta}{2} \ell_{pq}.$$

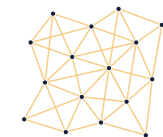
Sus centros se desplazan sobre la recta pq .

Regiones sólidas del β -skeleton lune-based en tres dimensiones.

La misma regla paramétrica funciona en cualquier dimensión; cambia el volumen de la región.

Stepping-Stone Graph en $\mathbb{R}^2$

$\alpha = 1.2$: región delgada



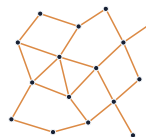
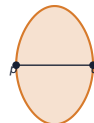
42 aristas sobre la misma nube

$\alpha = 2$: Gabriel



32 aristas sobre la misma nube

$\alpha = 8$: hacia RNG



23 aristas sobre la misma nube

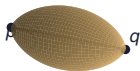
$$K_{SS,\alpha}(p, q) = \{z : \|z - p\|^\alpha + \|z - q\|^\alpha \leq \|p - q\|^\alpha\}.$$

$\alpha = 2 \Rightarrow$ GG, mientras que $\alpha \rightarrow \infty \Rightarrow$ RNG.

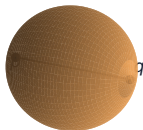
Fuente: Kannangara et al. (2018, 2019).

Stepping-Stone Graph en $\mathbb{R}^3$

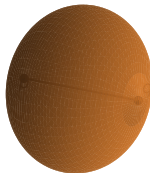
$\alpha = 1.2$



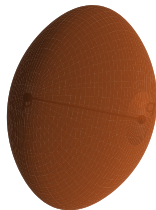
$\alpha = 2$: **GG**



$\alpha = 4$



$\alpha = 20 \approx \infty$: **RNG**



Secciones tridimensionales de stepping-stone desde una región delgada hasta la lente RNG.

<https://heri-espino.github.io/Stepping-Stone-Volume-Constants/>

La desigualdad no cambia con la dimensión:
sólo cambia el espacio en el que vive z .

El parámetro controla simultáneamente
forma, volumen y número de aristas.

Una expresión conecta segmento, Gabriel y RNG.

La jerarquía vale en cualquier dimensión

En $\mathbb{R}^d$, con definiciones compatibles y bajo las hipótesis usuales de **no degeneración**,

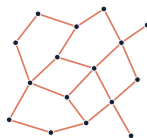
$$\text{MST} \subseteq \text{RNG} \subseteq \text{GG} \subseteq \text{Delaunay}.$$

- ▶ Una arista de MST tiene vacía su lente de RNG.
- ▶ Vaciar la lente de RNG también vacía la bola de Gabriel.
- ▶ La bola vacía de Gabriel certifica una arista de Delaunay.

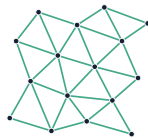
MST · 15 aristas



RNG · 21 aristas



Gabriel · 32 aristas



Delaunay · 38 aristas



La misma nube y cuatro subgrafos anidados.

La jerarquía y la conectividad que hereda de la MST son multidimensionales.

Fuente: Jaromczyk y Toussaint (1992); Dickerson y Eppstein (1996).

Las garantías cambian con la dimensión

Conexión

Cualquier pareja de vértices puede unirse por un camino. RNG, Gabriel y Delaunay son conectadas en cualquier dimensión porque contienen una MST.

Planaridad

Las aristas rectas no se cruzan salvo en un extremo común. Esta garantía es propia del plano: en $\mathbb{R}^2$, las gráficas de la jerarquía son planas.

Matiz para RNG: los ejemplos cuadráticos desde dimensión cuatro usan degeneraciones. Si se acota el número de puntos cosféricos, RNG tiene tamaño lineal en dimensión fija.

Esparsidad

Una gráfica es esparsa si tiene $O(n)$ aristas. En el plano, la planaridad da esa cota. En dimensiones mayores, Delaunay y Gabriel pueden tener $\Theta(n^2)$ aristas desde $d = 3$; RNG puede hacerlo desde $d = 4$ para conjuntos arbitrarios.

Dilatación

Compara la ruta más corta en la gráfica con la distancia directa. En el plano, Delaunay tiene dilatación menor que 1,998; MST, RNG y Gabriel no admiten una cota universal.

Fuente: Jaromczyk y Toussaint (1992); Agarwal y Matouek (1992); Xia (2013); Eppstein (2002).

SECCIÓN III

Del muestreo al límite local

Binomial, Poisson y el zoom microscópico



Proceso de puntos binomial: una muestra de tamaño fijo

Qué significa. Elegimos exactamente n puntos independientes con una misma densidad f dentro de una ventana W .

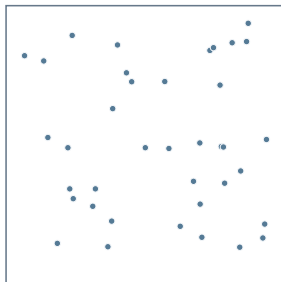
Cómo se genera.

1. fijar el tamaño n ;
2. repetir n veces un muestreo de posición según f ;
3. reunir las n posiciones en la nube $\mathcal{X}_n$.

Qué modela. Experimentos donde el tamaño se decide de antemano: una muestra estadística, un conjunto fijo de sensores o n ubicaciones observadas.

En una región A , el conteo es binomial. Los conteos de regiones separadas compiten por el mismo total y, por eso, son dependientes.

Binomial



exactamente $n = 38$

La cantidad total está fijada; sólo cambian las posiciones.

En el modelo binomial, el azar está en dónde caen los puntos, no en cuántos hay.

Fuente: Last y Penrose (2017); Penrose y Yukich (2001).

Proceso de puntos de Poisson: Llegadas sin total fijo

Qué significa. La intensidad ρ es el número medio de puntos por unidad de volumen. El total observado es aleatorio y los conteos de regiones disjuntas son independientes.

Cómo se genera en una ventana W .

1. generar un total de Poisson con media $\rho \lambda_d(W)$;
2. dado ese total, colocar los puntos de forma uniforme e independiente.

De dónde surge. Es el límite de muchas celdas pequeñas: en cada celda la probabilidad de una llegada es diminuta y las llegadas son casi independientes.

Qué modela. Un patrón base para eventos dispersos sin número prefijado, como impactos, defectos, llegadas o localizaciones ecológicas.



esta realización: $N = 43$

Otra realización puede contener una cantidad distinta.

Poisson fija una tasa media; la cantidad observada sigue siendo aleatoria.

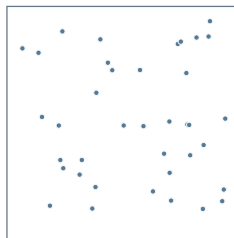
Fuente: Last y Penrose (2017).

Binomial y Poisson

Rasgo	Binomial	Poisson
Puntos totales	exactamente n	número aleatorio
Parámetro local	densidad f	intensidad ρ
Conteo $N(A)$	$\text{Bin}(n, p_A)$	$\text{Poi}(\rho \lambda_d(A))$
Vacuidad	$(1 - p_A)^n$	$e^{-\rho \lambda_d(A)}$
Conjuntos disjuntos	conteos dependientes	conteos independientes

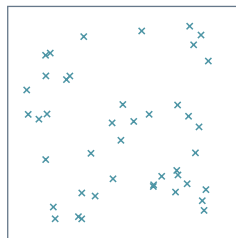
Condicionado a tener n puntos en una ventana, Poisson homogéneo produce n puntos uniformes independientes.

Binomial



exactamente $n = 38$

Poisson



esta realización: $N = 43$

Misma ventana: tamaño fijo frente a tamaño aleatorio.

Fuente: Last y Penrose (2017).

El zoom $n^{1/d}$ revela Poisson

Una ventana de radio r_n alrededor de x contiene aproximadamente

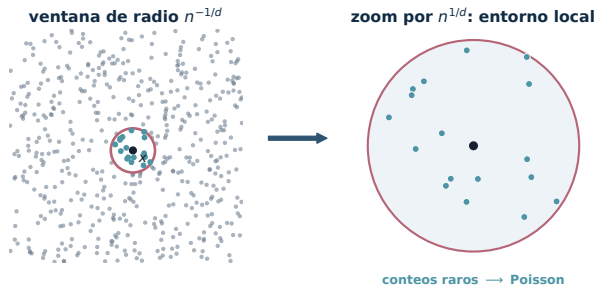
$$nf(x)r_n^d$$

puntos. Un límite local no degenerado exige

$$nr_n^d \asymp 1 \iff r_n \asymp n^{-1/d}.$$

Para todo conjunto acotado B ,

$$n\mathbb{P}\{X_i \in x + n^{-1/d}B\} \longrightarrow f(x)\lambda_d(B).$$



Nube binomial, vecindad de radio $n^{-1/d}$ y límite local de Poisson.

$n^{1/d}(\mathcal{X}_n - x) \Rightarrow \mathcal{P}_{f(x)}$: **límite local de Poisson.**

Fuente: Penrose y Yukich (2003, Lema 3.1); Last y Penrose (2017).

SECCIÓN IV

Factorización y primer orden

Forma, volumen y leyes asintóticas



Una región unitaria

Fijemos una región unitaria $K \subset \mathbb{R}^d$.
Para un par p, q , con $\ell_{pq} = \|p - q\|$,

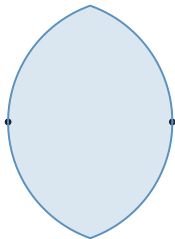
$$S(p, q) = p + \ell_{pq} R_{pq} K,$$

donde R_{pq} orienta el eje de K hacia $q - p$.

Traslaciones y rotaciones conservan volumen; una dilatación por ℓ lo multiplica por ℓ^d :

$$\lambda_d(S(p, q)) = a_K \ell_{pq}^d, \quad a_K := \lambda_d(K).$$

1. plantilla unitaria K



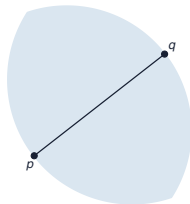
escala ℓ_{pq}

rotación R_{pq}

traslación $+p$



2. región $S(p, q)$



$$\lambda_d(S) = a_K \ell_{pq}^d$$

Trasladar, rotar y escalar una sola región unitaria K .

Las regiones $S(p, q)$ quedan resumidas por una forma K y un número a_K .

Fuente: Cardinal et al. (2009); Devroye (1988).

Devroye: regiones regulares y aristas lineales

Son un caso particular de la construcción anterior. Además de ser acotada, la plantilla unitaria K debe ser simétrica al intercambiar los extremos e invariante al rotar alrededor del eje que los une.

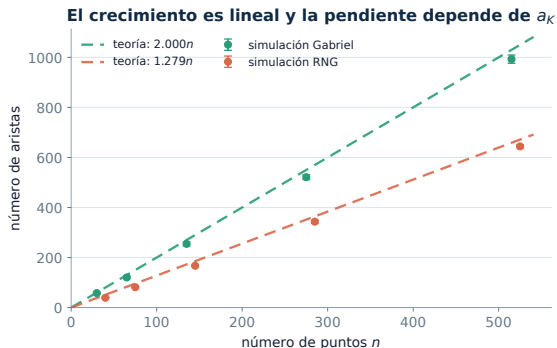
Si a_K es el volumen de esa plantilla, en el régimen disperso,

$$\mathbb{E}|E(G_n)| \sim \frac{\kappa_d}{2a_K} n.$$

En el plano, $\kappa_2 = \pi$:

regla	a_K	$\mathbb{E} E_n /n$
GG	$\pi/4$	2
RNG	$2\pi/3 - \sqrt{3}/2$	1,279 ...

Fuente: Devroye (1988).



Número de aristas contra n , con pendientes teóricas para GG y RNG.

El volumen controla el primer orden

Para un proceso de Poisson homogéneo de intensidad ρ ,

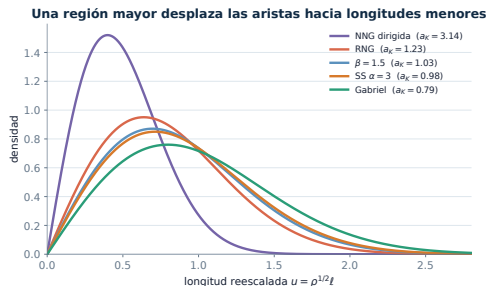
$$\mathbb{P}\{p \leftrightarrow q \mid \ell\} = e^{-\rho a_K \ell^d},$$

$$\mathbb{E}^0[\deg_{\text{out}}(0)] = \frac{\kappa_d}{a_K},$$

$$L_K \sim \text{Weibull}\left(d, (\rho a_K)^{-1/d}\right).$$

El grado medio no depende de ρ ;
la longitud característica sí.

Regla	a_K	grado
NNG dir.	π	1
GG	$\pi/4$	4
RNG	$2\pi/3 - \sqrt{3}/2$	2,558



Fuente: Devroye (1988); cálculo a partir de Last y Penrose (2017).

Densidades Weibull.

Grado y Weibull desde una integral

Bajo Palm, fijamos un punto en el origen. Un candidato a distancia r se conserva con probabilidad $e^{-\rho a_K r^d}$. La medida radial de aristas incidentes es

$$\nu_K(dr) = \rho d \kappa_d r^{d-1} e^{-\rho a_K r^d} dr.$$

Integrar la medida:

$$\nu_K((0, \infty)) = \frac{\kappa_d}{a_K} = \mathbb{E}^0[\deg_{\text{out}}(0)].$$

Normalizar la medida:

$$f_{L_K}(r) = d \rho a_K r^{d-1} e^{-\rho a_K r^d},$$

la densidad Weibull de forma d .

La sustitución $u = \rho a_K r^d$ cancela la intensidad en el grado, pero la conserva en la escala de las longitudes.

Fuente: Last y Penrose (2017); Devroye (1988); Espino-Montelongo y Maravillo Gómez (manuscrito bajo revisión, 2026).

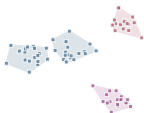
SECCIÓN V

Aplicaciones y síntesis

La teoría regresa a los datos y a la pregunta inicial



Ciudades, transporte y movimiento



Envoltentes convexas y componentes urbanas.

Maravillo Gómez et al. (2023).

Delimitan ciudades mediante componentes de una gráfica de intersección de **envoltentes convexas**.



Corredores inferidos a partir de localizaciones esporádicas.

Kannangara et al. (2018).

Proponen el **Stepping-Stone Graph** para inferir movimiento público desde ubicaciones esporádicas.



RNG como esqueleto idealizado de una red vial.

Watanabe (2008).

Evalúa la **RNG** como red vial teórica mediante longitud de enlaces y eficiencia de viaje.

Fuente: Maravillo Gómez, Calvillo Vives y Treviño Aguilar (2023); Kannangara et al. (2018); Watanabe (2008).

Una nube de puntos plantea preguntas distintas

Territorio y conexión global

El **diagrama de Voronoi** asigna cada lugar al sitio más cercano.

La **triangulación de Delaunay** forma una malla de vecinos naturales.

La **Minimum Spanning Tree** conecta todos los sitios con longitud total mínima.

Forma de la nube

La **envolvente convexa** contiene todos los puntos y corresponde al valor cero en esta convención.

El **alpha-shape** conserva una frontera de segmentos.

El **alpha-hull** describe la frontera mediante arcos.

Vecindad entre puntos

El **Nearest Neighbor Graph** elige al vecino más cercano.

El **Gabriel graph** y el **RNG** exigen regiones vacías.

Los **beta-skeletons** y el **Stepping-Stone Graph** varían la exigencia mediante un parámetro.

La construcción depende de la relación espacial que queremos representar.

Fuente: Toussaint (1980); Jaromczyk y Toussaint (1992); Edelsbrunner, Kirkpatrick y Seidel (1983); Kannangara et al. (2018).

La pregunta decide la regla y el análisis

1. **Plantear el objetivo:** asignar territorio, recuperar una frontera, minimizar costo o definir vecinos.
2. **Elegir la construcción:** diagrama de Voronoi, triangulación de Delaunay, MST, objetos alpha o una regla de región vacía.
3. **Estudiar la estructura:** inclusiones, conectividad, planaridad y número de aristas.
4. **Si los puntos son aleatorios:** normalizar la región, calcular su volumen y usar Poisson–Palm para el primer orden.

Agradezco especialmente al Dr. Héctor Maravillo por su guía y colaboración, y a la Sociedad Matemática Mexicana por este espacio.

Muchas gracias

Referencias I

- ▶ Ábrego, B. M. et al. (2011). On crossing numbers of geometric proximity graphs. *Computational Geometry*, 44, 216–233.
- ▶ Agarwal, P. K. y Matouek, J. (1992). Relative neighborhood graphs in three dimensions. *Computational Geometry*, 2, 1–14.
- ▶ Bose, P. y Smid, M. (2013). On plane geometric spanners: A survey and open problems. *Computational Geometry*, 46, 818–830.
- ▶ Bose, P. et al. (2013). Some properties of k -Delaunay and k -Gabriel graphs. *Computational Geometry*, 46, 131–139.
- ▶ Cardinal, J., Collette, S. y Langerman, S. (2009). Empty region graphs. *Computational Geometry*, 42, 183–195.
- ▶ Devroye, L. (1988). The expected size of some graphs in computational geometry. *Computers & Mathematics with Applications*, 15, 53–64.
- ▶ Devroye, L., Gudmundsson, J. y Morin, P. (2009). On the expected maximum degree of Gabriel and Yao graphs. arXiv:0905.3584.

Referencias II

- ▶ Dickerson, M. T. y Eppstein, D. (1996). Algorithms for proximity problems in higher dimensions. *Computational Geometry*, 5, 277–291.
- ▶ Eppstein, D. (2002). Beta-skeletons have unbounded dilation. *Computational Geometry*, 23, 43–52.
- ▶ Gabriel, K. R. y Sokal, R. R. (1969). A new statistical approach to geographic variation analysis. *Systematic Zoology*, 18, 259–278.
- ▶ Goldstein, L., Johnson, T. y Lachièze-Rey, R. (2018). Bounds to the normal for proximity region graphs. *Stochastic Processes and their Applications*, 128, 1208–1237.
- ▶ Jurkiewicz, P. (2023). TopoHub: A repository of reference Gabriel graph and real-world topologies for networking research. *SoftwareX*, 24, 101540.
- ▶ Kannangara, S. et al. (2018). Stepping stone graph for public movement analysis. *ACM SIGSPATIAL '18*, 65–74.
- ▶ Kannangara, S. et al. (2019). Stepping stone graph: A graph for finding movement corridors using sparse trajectories. *ACM Transactions on Spatial Algorithms and Systems*, 5(4), 1–24.

Referencias III

- ▶ Kirkpatrick, D. G. y Radke, J. D. (1985). A framework for computational morphology. En *Computational Geometry*, 217–248.
- ▶ Last, G. y Penrose, M. (2017). *Lectures on the Poisson Process*. Cambridge University Press.
- ▶ Lingas, A. (1994). A linear-time construction of the relative neighborhood graph from the Delaunay triangulation. *Computational Geometry*, 4, 199–208.
- ▶ Maravillo Gomez, H. S., Calvillo Vives, G. y Treviño Aguilar, E. (2023). The population sizes of Mexican cities follow a power-law distribution. *Mathematical Population Studies*, 30, 249–268.
- ▶ Matula, D. W. y Sokal, R. R. (1980). Properties of Gabriel graphs relevant to geographic variation research and the clustering of points in the plane. *Geographical Analysis*, 12, 205–222.
- ▶ Penrose, M. D. y Yukich, J. E. (2001). Central limit theorems for some graphs in computational geometry. *The Annals of Applied Probability*, 11, 1005–1041.
- ▶ Penrose, M. D. y Yukich, J. E. (2003). Weak laws of large numbers in geometric probability. *The Annals of Applied Probability*, 13, 277–303.

Referencias IV

- ▶ Edelsbrunner, H., Kirkpatrick, D. y Seidel, R. (1983). On the shape of a set of points in the plane. *IEEE Transactions on Information Theory*, 29, 551–559.
- ▶ Maravillo, H., Villarreal, D. y Espino-Montelongo, H. (2026). *ProximityGraphs*, v0.1.0a2. Zenodo. DOI: 10.5281/zenodo.21088183.
- ▶ Radke, J. D. (1988). On the shape of a set of points. En *Computational Morphology*, 105–136.
- ▶ Teng, S.-H. (1998). Combinatorial aspects of geometric graphs. *Computational Geometry*, 9, 277–287.
- ▶ Toussaint, G. T. (1980). The relative neighbourhood graph of a finite planar set. *Pattern Recognition*, 12, 261–268.
- ▶ Watanabe, D. (2008). Evaluating the configuration and the travel efficiency on proximity graphs as transportation networks. *Forma*, 23, 81–87.
- ▶ Xia, G. (2013). The stretch factor of the Delaunay triangulation is less than 1.998. *SIAM Journal on Computing*, 42, 1620–1659.